UTN.BA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Examen Final 10/02/2026

APELLIDO DEL ALUMNO: .... **NOMBRE:** ....

CORRIGIÓ: .... **REVISÓ:** ....

T1	T2	P1	P2	P3	P4	CALIFICACIÓN

Todas las respuestas deben ser justificadas adecuadamente para ser tenidas en cuenta.
No resolver el examen en lápiz. Duración del examen: 2 horas
Condición de aprobación (6 puntos): tres ejercicios correctamente resueltos (uno de T1 o T2 y dos de P1, P2, P3 o P4).
Su examen se mostrará una vez corregido.

T1. **a) Enuncie** el teorema de Gauss con hipótesis correspondientes ¿Es posible aplicarlo, en su forma directa, para calcular el flujo de $\vec{f}(x, y, z) = (x\,y, x^2, z - 3)$ a través de la superficie x^2-2x+y^2=0 con -1⩽ z ⩽1? Justifique.

b) Sea $\vec{f}(x, y, z) = (2\,x, z^2 + y\,, z - 8)$, ¿Es nulo el flujo de $\vec{f}$ a través de una esfera de radio 2? Fundamente.

T2- a) Enuncie dos ejemplos de campos vectoriales que permitan, mediante su circulación a lo largo de una curva cerrada, calcular el área del recinto limitado por la misma. Exprese que teorema utilizó y como realizó el proceso creativo.

b) Indique si la siguiente proposición es verdadera o falsa. Justifique:
La circulación del $\vec{f}(x, y) = (y, -x)$ a lo largo de la semicircunferencia de centro en el origen y radio 3, con y⩾0 es 24 π ?

P1- Sea y_p la solución de $y' = 2\,x$ con $y(1) = 4$. Si F: $R^2 \to R$ de clase C^1 tiene $\nabla F(1\,,0) = (1\,,\ -1)$ siendo $F(1,0) = 0.5$ y $G(x,y) = y_p - 4\,F(x\,,\,y)$
Calcule mediante una aproximación lineal conveniente G(1.01; 2.02) .

P2 - **Calcule** el flujo del campo vectorial $\overline{F}(x, y, z) = (x, y, x + 2y + xz)$ a través del trozo de superficie S dada por $y = x^2 \quad con \quad 0 \le z \le 9 - x^2$ considerando la orientación de la superficie con versores normales con segunda componente negativa.

P3 - Sea $\bar{f} \in C^1$ en $\mathbb{R}^2$, con matriz jacobiana $D\,\bar{f}(x, y) = \begin{pmatrix} g(x,y) & 3x \\ y & h(x,y) \end{pmatrix}$. Si la integral de línea de $\bar{f}$ desde (2 , 0) hasta (-2 , 0) a lo largo del eje x resulta igual a - 1/3 , **calcule** el valor que corresponde al realizarla entre dichos puntos, pero a lo largo de la curva de ecuación $y = \sqrt{4 - x^2}$ con la misma orientación.

P4 -) Dada $w = u^2 \ln(2\,x - 1)$ con $u = f(x, y)$ definida implícitamente por $u\,y + e^{u-x} = 2$, resulta $w = h(x, y)$. **Determine** la ecuación del plano tangente a la gráfica representativa de $w = h(x, y)$, siendo el punto de tangencia $(1,1,w_0)$

AM 2	Final	HOJA N° 1/3
		FECHA 10-2-26

T1 a) Enunciar el teorema de Gauss con hipótesis correspondientes. ¿Es posible aplicarlo, en su forma directa, para calcular el flujo $\bar{F}(x,y,z) = (xy, x^2, z-3)$ a través de la sup. $x^2-2x+y^2=0$ con $-1 \leq z \leq 1$? Justificar

hip:
- W una región de $\mathbb{R}^3$
- S sup. cerrada, frontera de W con normal saliente
- $\bar{F} = (P, Q, R) \in C^1$

$$\oiint_S \bar{F}\, d\bar{s} = \iiint_W \operatorname{div}(\bar{F})\, dx\,dy\,dz$$

con $\operatorname{div}(\bar{F}) = P'_x + Q'_y + R'_z$

- $S: x^2-2x+y^2=0$ es un cilindro desplazado $\Rightarrow$ sup. ABIERTA

No encierra ningún sólido $\Rightarrow$ No se puede utilizar el T. Gauss en forma directa

b) Sea $\bar{F}(x,y,z) = (2x, z^2+y, z-8)$ ¿es nulo el flujo de $\bar{F}$ a través de una esfera de radio 2? Fundamentar

Esfera $\rightarrow$ Sup orientada con normal saliente

$\bar{F} = (P, Q, R) \in C^1$ (componentes polinómicas)

$$\Rightarrow \oiint_S \bar{F}\, d\bar{s} = \iiint_W \operatorname{div}(\bar{F})\, dx\,dy\,dz = \iiint_W 2+1+1\, dx\,dy\,dz =$$

$$= 4 \underbrace{\boxed{\iiint_W d\text{vol}}}_{>0} \rightarrow \text{Vol. esfera} \Rightarrow >0$$

$$\boxed{\oiint_S \bar{F}\, d\bar{s} > 0} \Rightarrow (+)$$

$$\oiint_S \bar{F}\, d\bar{s} = 4 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{128}{3}\pi \neq 0$$

NOTA

12 a) Enunciar dos ejemplos de campos vectoriales que permitan, mediante su circulación a lo largo de una curva cerrada, calcular el área del recinto limitado por la misma. Expresar qué teoremas utilizó y cómo realizó el proceso creativo

$$A_D = \iint_D dxdy$$

si quiero calcular el área D a través de una integral simple $\Rightarrow$ uso T. Green que relaciona una integral simple con una doble.

C: curva suave frontera de D (región compacta de $\mathbb{R}^2$)

$\bar{F} = (P, Q)$. Por Green: $\oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{l} = \iint_D Q'_x - P'_y \, dxdy$

si $Q'_x - P'_y = 1$ hallo el área de D

$Q'_x - P'_y = 1$ opción 1: $Q'_x = 1$, $P'_y = 0$

$\bar{F} = (0, x)$

opción 2: $Q'_x = 0$, $P'_y = -1$ $\longrightarrow$ $\bar{F} = (-y, 0)$

$$\Rightarrow \boxed{A_D = \iint_D dxdy = \oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{l}}$$

b) Indicar si la seg. proposición es V o F:

La circulación del $\bar{F}(x,y) = (y, -x)$ a lo largo de la semicircunferencia de centro en el origen y radio 3, con $y \geq 0$ es 24π.

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\int_C \bar{F}\, d\bar{l} = \int_a^b \bar{F}(\bar{\beta}(t))\, \bar{\beta}'(t)\, dt$$

$$C: \bar{\beta}(t) = (\overbrace{3\cos(t)}^{x}, \overbrace{3\,\text{sen}(t)}^{y}) \quad t \in [0, \pi]$$

$$\bar{\beta}'(t) = (-3\,\text{sen}(t), 3\cos(t))$$

$$\int_C \bar{F}\, d\bar{l} = \int_0^\pi (3\,\text{sen}(t), -3\cos(t))\, (-3\,\text{sen}(t), 3\cos(t))\, dt =$$

$$= \int_0^\pi -9\,\text{sen}^2(t) - 9\cos^2(t)\, dt = -9 \int_0^\pi \overbrace{\text{sen}^2(t) + \cos^2(t)}^{1}\, dt =$$

$$= -9 \int_0^\pi dt = \boxed{-9\pi = \int_C \bar{F}\, d\bar{l}} \neq 24\pi \Rightarrow F$$

AM2	Final	HOJA Nº 2/3 FECHA 10-2-26

(P1) Sea y_p la solución de $y' = 2x$ con $y(1) = 4$.
Si $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tiene $\nabla F_{(1,0)} = (1,-1)$ siendo $F_{(1,0)} = 0{,}5$
y $G(x,y) = y_p - 4\,F(x,y)$. Calcular mediante una aproximación lineal conveniente $G(1{,}01;\ 0{,}02)$

$y' = 2x \Rightarrow y = x^2 + c \qquad y(1) = 4 \to 4 = 1^2 + c \to c = 3$

$\boxed{y = x^2 + 3}$

$\nabla f_{(1,0)} = (1,-1) \to f'_x(1,0) = 1,\quad f'_y(1,0) = -1$

$f_{(1,0)} = 0.5$

$G(x,y) = x^2 + 3 - 4\,f(x,y)$

aprox. lineal :
$$z = \underbrace{G(1,0)}_{2} + \underbrace{G'_x(1,0)}_{-2}(x-1) + \underbrace{G'_y(1,0)}_{4}\,y$$

$G(1,0) = 1^2 + 3 - 4\,\underbrace{f(1,0)}_{0,5} = 2$

$G'_x = 2x - 4 f'_x(x,y) \to G'_x(1,0) = 2 - 4\,\underbrace{f'_x(1,0)}_{1} = -2$

$G'_y = -4 f'_y(x,y) \to G'_y(1,0) = -4\,\underbrace{f'_y(1,0)}_{-1} = 4$

$$z = 2 - 2(x-1) + 4y$$

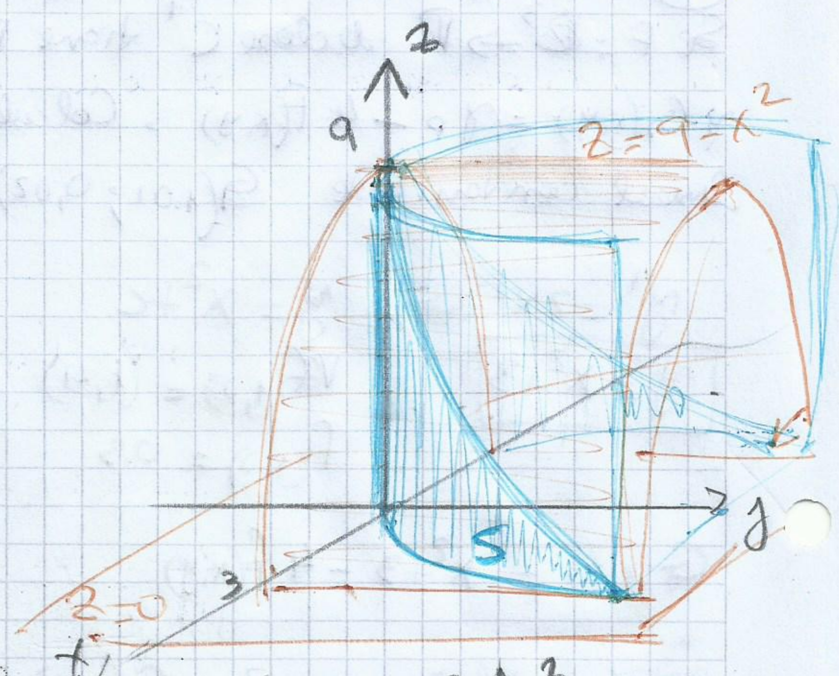
$$G(1.01;\ 0.02) \cong 2 - 2(1.01-1) + 4 \times 0.02 = \frac{103}{50}$$

$$\boxed{G(1.01;\ 0.02) \cong 2{,}06}$$

NOTA

(P2) Calcular el flujo del campo vectorial $\overline{F}(x,y,z)=(x, y, x+2y+xz)$ a través del trozo de sup. $S: y=x^2$ con $0\le z\le 9-x^2$ considerando la orientación de la sup con versores normales con segunda componente negativa.

$$S: \begin{cases} y=x^2 \\ 0\le z\le 9-x^2 \end{cases}$$

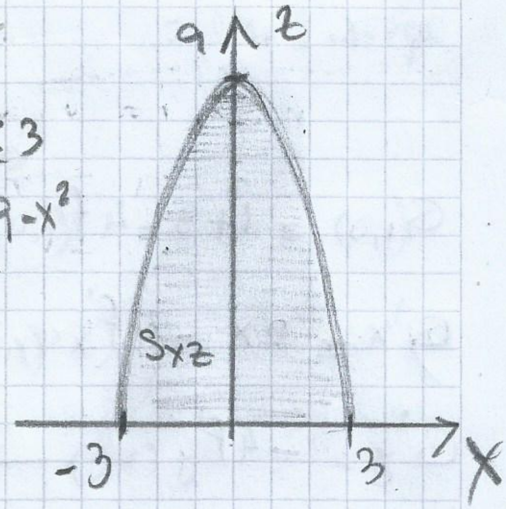


N con componente $y<0$

$x^2-y=0 \rightarrow N=(2x,-1,0)$

Proyecto en xz

. Hallo la intersección de
$y=x^2$
$z=9-x^2$
para analizar la proyección



$-3\le x\le 3$

$0\le z\le 9-x^2$

$y=x^2$

$$\iint_S \overline{F}\,ds = \iint_{S_{xz}} \overline{F}\,N\,dx\,dz =$$

$$= \iint_{S_{xz}} (x, y, x+2y+xz)\,(2x,-1,0)\,dx\,dz =$$

$$= \iint_{S_{xz}} 2x^2-y+0\,dx\,dz \overset{y=x^2}{=} \iint_{S_{xz}} \overbrace{2x^2-x^2}^{x^2}\,dx\,dz =$$

$$= \int_{-3}^{3}\int_{0}^{9-x^2} x^2\,dz\,dx = \int_{-3}^{3} x^2(9-x^2)\,dx = \frac{324}{5}$$

$$\boxed{\iint_S \overline{F}\,d\overline{s} = \frac{324}{5}}$$

NOTA

AM2	Final	HOJA N° 3/3 FECHA 10-2-26

(P3) Sea $\bar{F} \in C^1$ en $\mathbb{R}^2$ con matriz jacobiana $DF_{(x,y)} = \begin{pmatrix} g(x,y) & 3x \\ y & h(x,y) \end{pmatrix}$

Si la integral de línea de $\bar{F}$ desde $(2,0)$ hasta $(-2,0)$ a lo largo del eje x resulta igual ~~···~~ a $-1/3$, calcular el valor que corresponde al realizarla entre dichos puntos, pero a lo largo de la curva de ecuación $y = \sqrt{4-x^2}$ con la misma orientación.

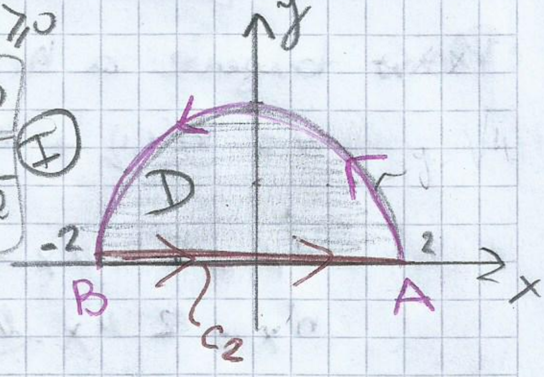
$$\int_A^B \bar{F}\,d\bar{l} = -\int_B^A \bar{F}\,d\bar{l}$$

$$\int_{C_1} \bar{F}\,dl = -\frac{1}{3}$$ C_1 va de $(2,0)$ a $(-2,0)$

C_2 va de $(-2,0)$ a $(2,0)$ $\Rightarrow \displaystyle\int_{C_2} \bar{F}\,d\bar{l} = \frac{1}{3}$

$C: y = \sqrt{4-x^2} \Rightarrow y^2 = 4 - x^2$ con $y \geq 0$

$\boxed{x^2 + y^2 = 4 \text{ con } y \geq 0}$



(I) $C_F = C \cup C_2 \Rightarrow \boxed{\oint_{C_F} \bar{F}\,d\bar{l} = \int_C \bar{F}\,d\bar{l} + \int_{C_2} \bar{F}\,d\bar{l}}$

C_F es curva cerrada suave a trozos orientada positivamente.

D región compacta de $\mathbb{R}^2$ cuya frontera es C_F

$f \in C^1$ (enunciado) $\Rightarrow$ T Green $\Rightarrow \displaystyle\oint_{C_F^+} \bar{F}\,d\bar{l} = \iint_D Q'_x - P'_y \,dx\,dy$

$$DF_{(x,y)} = \begin{pmatrix} P'_x & P'_y \\ Q'_x & Q'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x,y) & 3x \\ y & h(x,y) \end{pmatrix} \rightarrow Q'_x - P'_y = y - 3x$$

$$\oint_{C_F^+} \bar{F}\,d\bar{l} = \iint_D y - 3x \,dx\,dy \stackrel{CV}{=} \int_0^{\pi}\int_0^2 r\,(r\,sen(t) - 3r\cos(t))\,dr\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^2 r^2 sen(t) - 3r^2\cos(t)\,dr\,dt = \int_0^{\pi} \frac{8}{3} sen(t) - 8\cos(t)\,dt =$$

$$\boxed{\oint_{C_{F+}} \bar{F}\,d\bar{l} = \frac{16}{3}}$$

(I) $\dfrac{16}{3} = \displaystyle\int_C \bar{F}\,d\bar{l} + \frac{1}{3}$

$\rightarrow \boxed{\int_C \bar{F}\,dl = 5}$

NOTA

(P4) Dada $w = u^2 \ln(2x-1)$ con $u = f(x,y)$ definida implícitamente por $uy + e^{u-x} = 2$, resulta $w = h(x,y)$

Determinar la ecuación del plano tangente a la gráfica representativa de $w = h(x,y)$ siendo el punto de tangencia $(1,1,w_0)$

$u = f(x,y) \qquad uy + e^{u-x} = 2 \qquad F(x,y,u) = uy + e^{u-x} - 2$

$F(1,1,u) = 0 = u + e^{u-1} - 2$

$w = h(x,y)$

$(1,1,w_0) \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x=1 \\ y=1 \end{matrix}} \qquad w = u^2 \ln(2\times 1 - 1) = 0$

$\boxed{u = 1}$

$\boxed{w = 0}$

Plano tangente a $h(x,y)$ en $(1,1,\overbrace{h(1,1)}^{0})$

$$w = \underbrace{h(1,1)}_{0} + h'_x(1,1)\,(x-1) + h'_y(1,1)\,(y-1)$$

$$w'_x = h'_x = 2u\,u'_x \cdot \ln(2x-1) + u^2 \frac{1}{2x-1} \cdot 2$$

$$h'_x = 2 \cdot u'_x \cdot \underbrace{\ln(2-1)}_{0} + 1^2 \times \frac{2}{2-1} = \boxed{2 = h'_x(1,1)}$$

$$w'_y = h'_y = 2u\,u'_y \ln(2x-1)\Big|_{(1,1)} = \boxed{0 = h'_y(1,1)}$$

$$w = 2(x-1) + 0$$

$$\boxed{w = 2x - 2}$$

NOTA